Anale. Seria Informatică. Vol. I fasc. I
Annals. Computer Science Series. 1st Tome 1st Fasc.

Analiza influenței condițiilor inițiale asupra soluțiilor ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale, de tip parabolic

Prof.dr. ing. Sterie Ştefan
Universitatea "Tibiscus" din Timişoara
Ş.l. ing. Amado Ştefan
Academia Tehnică Militară din Bucureşti

ABSTRACT. In this paper is analysed influence of the initial condition for parabolic partial differential equation with u(x,t) solution. Initial condition u(x,0) = f(x) is analysed for three function f1(x) = 10 , f2(x) = 10*sin(kx) and f3(x) = 10*x(x+p).

Se consideră ecuația diferențială:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

unde a este o constantă, u(x,t) funcție de variabilele x şi t. La ecuația (1) se ataşază condiția inițială :

$$u(x,0) = f(x) \qquad (2)$$

şi condițiile la limită :

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \qquad u(1,t) = \varphi_2(t), \qquad (3)$$

cu funcțiile $\varphi_1(t)$ şi $\varphi_2(t)$ continue de t, date, la fel ca şi funcția f(x).

Soluția ecuației (1) cu condițiile u(0, t) = u(1 , t) = 0 este:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \exp(-\frac{j^2\pi^2a^2}{l^2}t)\sin(\frac{j\pi x}{l}), \qquad (4)$$

j fiind număr natural iar termenul C_j are expresia:

$$C_j = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{j\pi x}{l})dx \,. \qquad (5)$$

1 Variația coeficientului C_j la funcțiile constante, sinusidale şi polinomiale

Se consideră funcțiile şi coeficienții C_j corespunzători :

$$f1(x) = 10\ ; \quad f2(x) = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{10L}\right),\ L = 0.2\ ; \quad f3(x) = 10x(x+4)\ ;$$

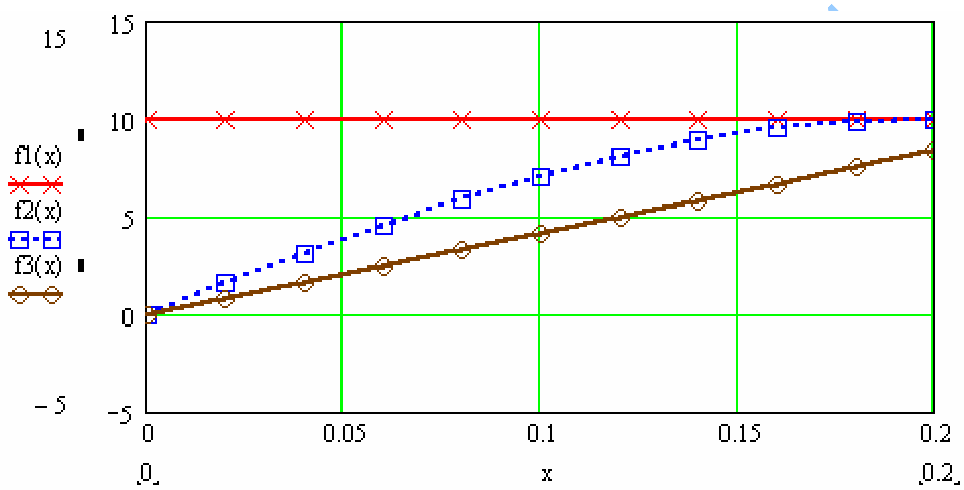

Fig.1 Graficele funcțiilor adoptate în studiu

$$C1(j) := \frac{2}{1} \cdot \int_0^1 f1(x) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{1}\right) dx \qquad C2(j) := \frac{2}{1} \cdot \int_0^1 f2(x) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{1}\right) dx$$

$$C3(j) := \frac{2}{1} \cdot \int_0^1 f3(x) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{1}\right) dx$$

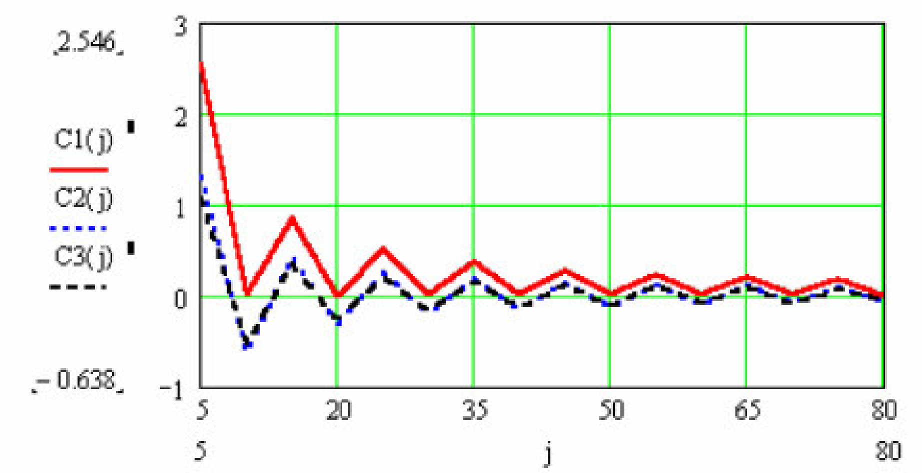

Fig.2 Variația coeficienților C_j corespunzători funcțiilor f(x) adoptate

2 Variația soluțiilor ecuației diferențiale (1) cu condiții inițiale corespunzătoare funcțiilor constante, sinusidale şi polinomiale

Soluțiile ecuației diferențiale (1) în condițiile (2) corespunzătoare funcțiilor f1(x), f2(x) şi f3(x) sunt date de relația (4) cu considerarea coeficienților C_j corespuzători. Astfel pentru L = 0.2 ; a = 0.1 ; $t \in [0,1]$- cu pasul 0.01 şi $x \in [0, L]$-cu pasul 0.01L se obțin următoarele variații:

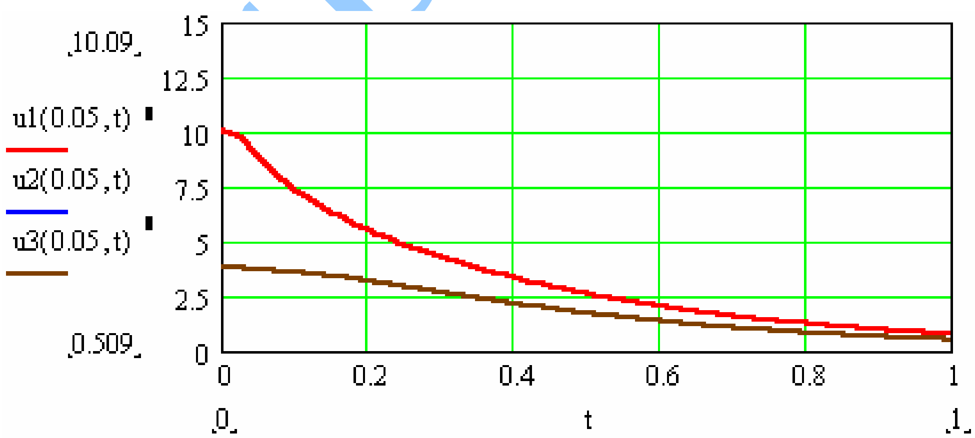

Fig.3 Variația în timp a soluțiilor u(x,t) la x = 0.05

3 Cazul domeniului de variație a variabilei x∈(-∞,+∞)

Ecuației diferențiale (1) i se asociază numai condiția inițială (2), funcția f(x) fiind definită, integrabilă şi mărginită pentru toate valorile lui x. Soluția ecuației (1) în acest caz este dată de formula lui Poisson:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta)}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{(\eta - x)^2}{4a^2 t} d\eta \qquad (6)$$

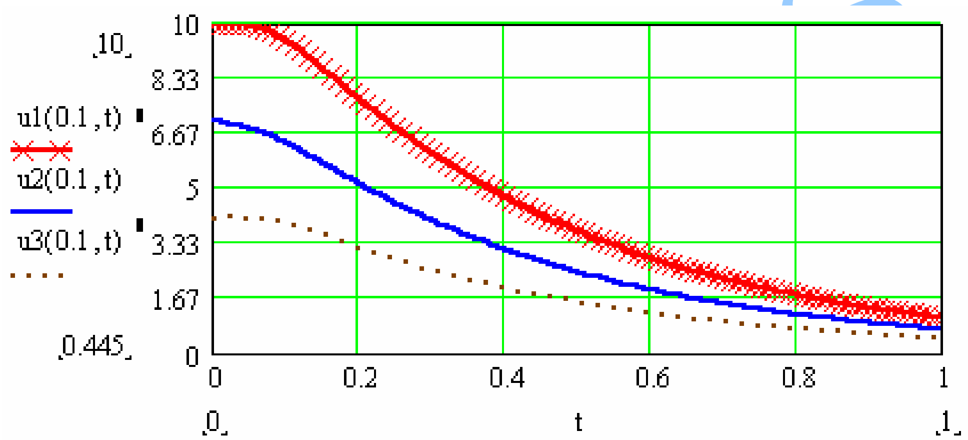

Fig.4 Variația în timp a soluțiilor u(x,t) la x = 0.1

Se adoptă $x \in \left(-L, L\right)$ şi funcțiile

f1(x) = 10 ,

f2(x) = 10.sin($\frac{\pi(x+L)}{2L}$) şi

f3(x) $= \frac{10}{L^2}(L+x)(L-x)$

a = 0.1, t$\in\left(0.1, 19.1\right)$ - cu pasul 0,1.

Se obțin următoarele rezultate:

V =

	1	2	3	4
1	-0.5	10	0	0
2	-0.4	10	3.09017	3.6
3	-0.3	10	5.877853	6.4
4	-0.2	10	8.09017	8.4
5	-0.1	10	9.510565	9.6
6	0	10	10	10
7	0.1	10	9.510565	9.6
8	0.2	10	8.09017	8.4
9	0.3	10	5.877853	6.4
10	0.4	10	3.09017	3.6
11	0.5	10	$1.224606 \cdot 10^{-15}$	0

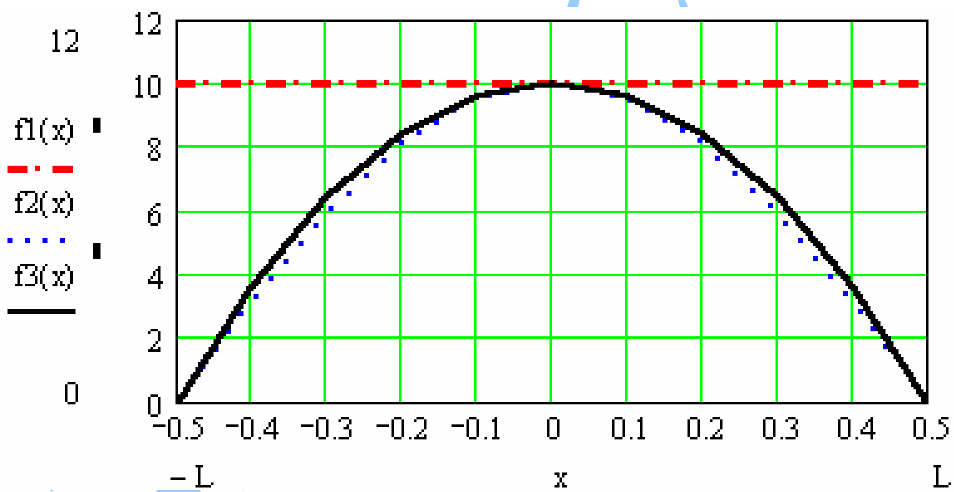

Fig. 5 Valorile şi variaţiile funcţiilor f1(x), f2(x) şi f3(x) în funcţie de x

4 Concluzii

Din rezultatele numerice obţinute prin rezolvarea problemelor menţionate se evidenţiază următoarele concluzii:

- Funcţia $\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(\frac{-(\xi - x)^2}{4a^2 t})$ este soluţie a ecuaţiei (1);

- Scriem ecuația (1) sub forma $F(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, adică luăm

a =1, rezultat exprimat prin înlocuirea lui t prin $\frac{y}{a^2}$. Dacă u(x,y) este o soluție a lui F(x,y) atunci și U(x,y) va fi o soluție a lui F(x,y), unde :

$$U(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \exp(\frac{-x^2}{4y}) * u(\frac{x}{y}, \frac{-1}{y});$$

- Soluțiile ecuației lui Poisson corespnzătoare funcțiilor analizate sunt reprezentate în figura 6:

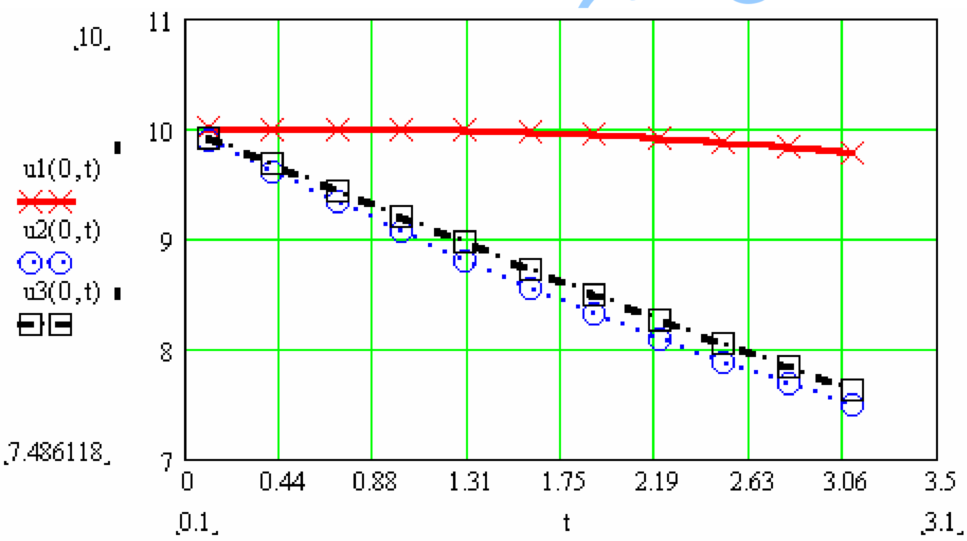

Fig.6 Variația soluțiilor ecuației lui Poisson pentru x= 0 și t în intervalul 0.1…3.1

- Eroarea relativă a funcțiilor f2(x) și f3(x) pe intervalul x = (0,0.2) și eroarea soluțiilor corespunzătoare u2(0.1,t) și u3(0.1,t) sunt reprezentate în fig.7 și 8:

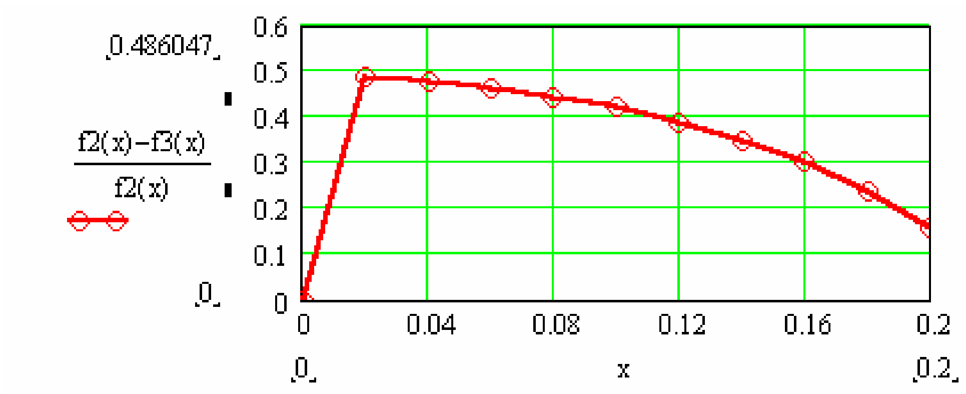

Fig.7 Eroarea relativă a funcțiilor f2(x) și f3(x)

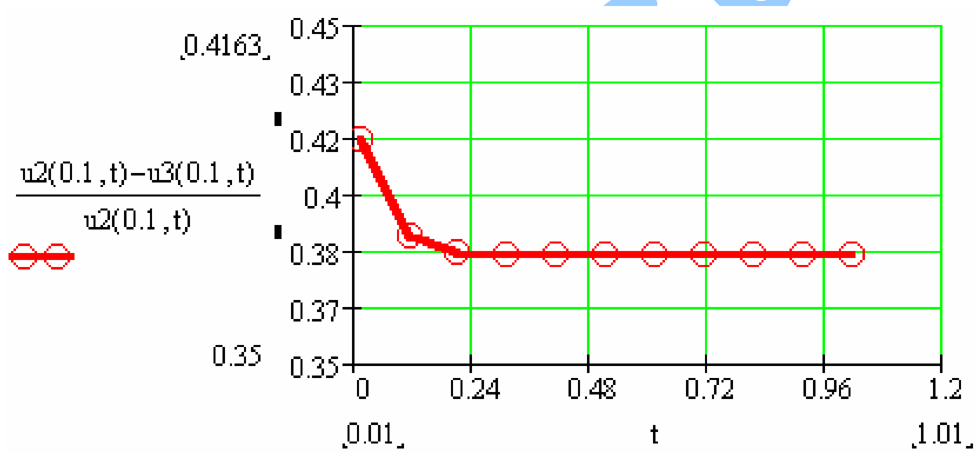

Fig.8 Eroarea relativă a soluțiilor corespunzătoare funcțiilor f2(x) și f3(x)

- În cazul soluției lui Poisson se obțin, în funcție de soluțiile inițiale analizate următoarele erori relative:

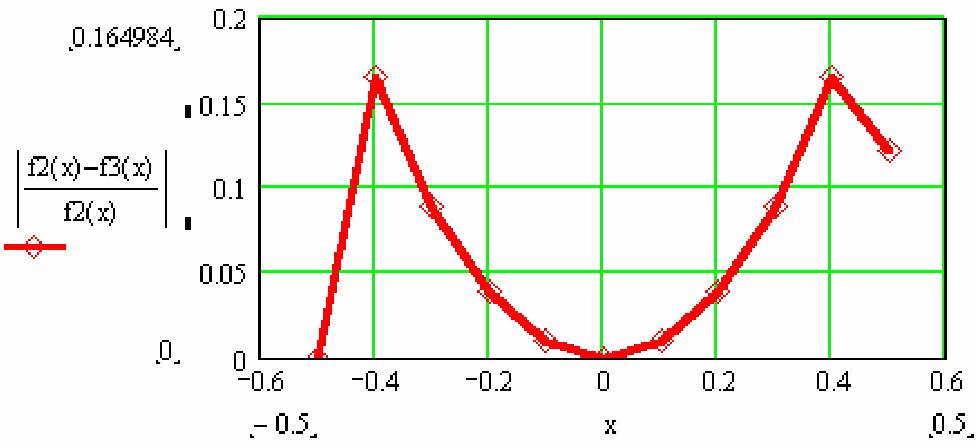

Fig.9 Eroarea relativă în modul a funcțiilor analizate în soluția lui Poisson

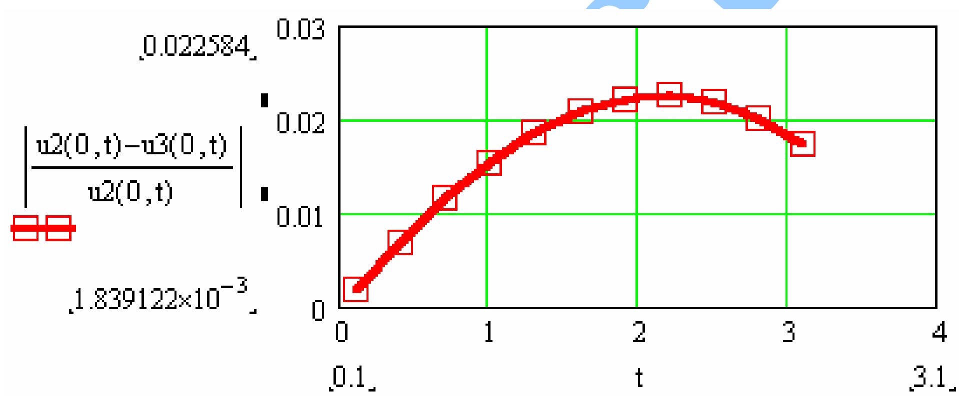

Fig.10 Eroarea relativă în modul a soluțiilor corespunzătoare funcțiilor analizate

Bibliografie

[Cio63] **Ciorănescu, N.**, *Tratat de matematici speciale*, E.D.P., Bucureşti, 1963.

[Mys75] **Myskis, A.D.**, *Advanced Mathematics for Engineers*, Mir Publishers, Moscow, 1975

[OS82] **Olaru,V., Stănăşilă, T.**, *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.

[Sab80] **Şabac, G**., *Matematici speciale*, E.D.P., Bucureşti, 1980.

[TO77] **Teodorescu, N., Olariu, V.,** *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale*,Vol.1,2,3, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977-1979.

[Vla+81] **Vladimirov, S. V. ş.a.**, *Culegere de probleme de ecuațiile fizicii matematice*, E. Ş. E. Bucureşti, 1981.