ETUDE COMPARATIVE DES MÉTHODES HESSIENNES POUR L'OPTIMISATION DES PUISSANCES ACTIVES

Abdelmalek Lakhdar

Département d'Electricité, E.N.P.O, B.P 1523 Oran El M'naouer, Oran, Algérie

Rahli Mostefa

Département d'Electrotechnique, U.S.T.O, B.P. 1505 Oran, El M'naouer, Oran, Algérie

ABSTRACT: This paper presents some methods to solve an economic load dispatch problem. The problem is solved by quasinewtonnien methods algorithm. We compute active and reactive power transmission losses and maintain it constant in optimal power flow calculation procedure. In that case, we use penalty function which permit to find optimum power generation, the results of the minimum fuel cost and computing time are slightly the same. The proposed approach has been applied for the first time to 30 bus test system and the results are judged satisfactory
KEYWORDS: réseaux électriques, optimisation, méthodes hessiennes, puissances actives.

1 INTRODUCTION

Le rôle primordial de toute entreprise chargée de la production d'énergie est d'assurer à tout moment et en tout lieu la couverture en puissances actives et réactives demandées par tous les utilisateurs et de garantir une qualité acceptable de l'énergie livrée avec un coût aussi faible que possible.
Le problème de la répartition économique d'énergie a pris une importance considérable avec l'apparition de la crise d'énergie nécessitant des combustibles de plus en plus chers. La résolution de la tâche de minimisation de la fonction coût est devenue en partie facile avec surtout l'apparition de l'informatique permettant une grande rapidité de calcul dès son application aux réseaux électriques et une bonne fiabilité de commande de cette répartition en temps réel.
Dans cet article nous allons comparer les méthodes suivantes et qui ont tous une forme de la programmation non linéaire:

- *Méthode de Broyden
- *Méthode de Davidon-Fletcher-Powell
- *Méthode de Pearson
- *Méthode de Zoutendijk

2 MODÈLE MATHÉMATIQUE [FS68]

Considérons un réseau électro-énergétique dont on connaît à tout instant les puissances actives demandées en vue de satisfaire les nombreux consommateurs liés à ce réseau. Les frais de combustibles nécessaires pour la production des puissances électriques est une fonction monotone.
Le responsable du dispatching possède une infinité de solutions pour répartir ces puissances aux consommateurs. Mais parmi toutes les solutions existantes, il faut garantir la répartition optimale en un temps très réduit et consistant à minimiser le coût de production total de l'énergie électrique.
La fonction du coût total de production d'énergie dite fonction objective (dépendant fortement des puissances actives à générer) s'écrit sous la forme mathématique suivante:

$$F = \sum_{i=1}^{nG} F_i(P_{Gi}) \qquad (1)$$

où:
F_i : fonction de coût du ième générateur
F : fonction de coût total.
n_G : nombre de générateurs.
P_{Gi} : puissance active produite par le i^{eme} générateur.
Notre tâche consiste à minimiser la fonction de coût de production total:

$$\min\left[\sum_{i=1}^{ng} F_i(Pg_i)\right] \qquad (2)$$

avec:

$$Pg_i^m \le Pg_i \le Pg_i^M \qquad (3)$$

$$Qg_i^m \le Qg_i \le Qg_i^M \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{ng} Pg_i = \sum_{j=1}^{n} Pch_j + P_L \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{ng} Q_{g_i} = \sum_{j=1}^{n} Q_{ch_j} + Q_L \tag{6}$$

$$E_i \leq E_i^M \tag{7}$$

où généralement $F_i(Pg_i)$ est une fonction quadratique

$$F_i(Pg_i) = a_i + b_i\,Pg_i + c_i\,Pg_i^{\,2} \tag{8}$$

a_i, b_i c_i sont des constantes connues.
ng nombre de générateurs
Pgi puissance active produite par le générateur i
Qgi puissance réactive produite par le générateur i
Pch puissance active de charge totale
Qch puissance réactive de charge totale
P_L;Q_L pertes actives et réactives totales
Ei tension nodale du nœud i

3 MÉTHODE DE PÉNALITÉ [Him72, Min83, DH88]

Les méthodes mathématiques que nous allons comparer sont des méthodes avec contraintes. C'est pour cette raison qu'on va utilisé une méthode basée sur la transformation du problème original contraint en un problème auxiliaire non contraint et où le minimum est le même dans les deux cas.
Le principe de base de ces méthodes consistent à modifier le critère en lui ajoutant une fonction de pénalisation qui permet le passage de la programmation avec contraintes en une programmation sans contraintes.

$$F(P_{Gi}, R_k) = F(P_{Gi}) + R_k \sum_{i=1}^{k} G_i^2(P_{Gi}) + \frac{1}{R_k} \sum_{i=1}^{m} H_i^2(P_{Gi}) \tag{9}$$

$G_i(P_{Gi}) \geq 0$,i = 1,k contraintes de type inégalité
$H_i(P_{Gi}) = 0$,i = 1,m contraintes de type égalité
R_k est une constante de réglage de calcul (coefficient de pénalité).

4 FORMULATION MATHEMATIQUE

Le problème de minimisation de la fonction coût des puissances générées par la programmation non linéaire peut être posé de la manière suivante :

Minimiser *f (x)*
Sous les contraintes de type égalité et inégalité suivantes:

$$h_i(x) = 0 \qquad i = 1,\ldots,m \tag{10}$$

$$g_i(x) \geq 0 \qquad i = m+1,\ldots,p \tag{11}$$

4 DESCRIPTION DES METHODES HESSIENNES

Le principe de ces méthodes [Him72] consistent essentiellement en une généralisation de la formule itérative de Newton originale par l'approximation de la formule quadratique de F(PGi) en négligeant le troisième terme ainsi que les termes d'ordre supérieur à partir du développement en série de Taylor .
A l'itération k, la transition du point x(k) à un autre point successif x(k+1) est donnée par la formule ci-dessous:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)} \tag{12}$$

où:
$\Delta x^{(k)}$ est un vecteur de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$
$s^{(k)}$ est un vecteur dans la direction $\Delta x^{(k)}$
$\lambda^{(k)}$ est un scalaire avec $\Delta x^{(k)} = \lambda^{(k)} s^{(k)}$
Le minimum de la fonction *f (x)* dans la direction de $\Delta x^{(k)}$ est obtenu par la différentiation de f(x) en respectant chaque composant de Δx et en annulant l'équation résultante.

$$\Delta x^{(k)} = -\left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \nabla f(x^{(k)}) \tag{13}$$

où $\left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1}$ est l'inverse de la matrice du Hessien $H(x^{(k)})$.
En introduisant l'expression de la formule (13) dans la formule (14) du point $x^{(k)}$ au point $x^{(k+1)}$ de la méthode de Newton, nous obtenons :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[\nabla^2 f(x^{(k)})\right]^{-1} \nabla f(x^{(k)}) \tag{14}$$

Mais en général pour une fonction objective non linéaire, le minimum de f(x) n'est pas obtenu pour seulement une position comme l'indique l'équation (14) mais est usuellement modifié en introduisant le paramètre λ appelé pas de calcul.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} H^{-1}(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}) \tag{15}$$

L'expression (15) est appelée formule itérative de Newton.
La direction de recherche est donnée par:

$$s^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}) \tag{16}$$

Dans les méthodes Quasi-Newtonniènnes, la matrice du Hessien est remplacée par son inverse.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} \eta(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}) \tag{17}$$

où $\eta(x^{(k)})$ représente une approximation de $H^{-1}(x)$ et souvent elle est appelée matrice de direction.
Dans la plupart des méthodes de résolution $H^{-1}(x^{(k+1)})$ est approximée des différentes informations collectées au k ième rang.

$$H^{-1}(x^{(k+1)}) \approx \omega\,\eta^{(k+1)} = \omega(\eta^{(k)} + \Delta\eta^{(k)}) \tag{18}$$

où :
η est la matrice approximative de $H^{-1}(x)$.
$\Delta\eta^{(k)}$ est une matrice spécifique.
ω est un scalaire constant.
A l'itération $x^{(k+1)}$, nous connaissons $x^{(k)}$, $\nabla f(x^{(k)})$, $\nabla f(x^{(k+1)})$, et $\eta^{(k)}$, et nous devons rechercher la matrice de direction $\eta^{(k+1)}$ de l'équation (14) en posant:

$$x^{k+1} - x^{k} = \Delta x^{k}$$
$$H^{-1}\left(x^{k+1}\right) \cong \omega\eta^{k+1} \cong \omega\left(\eta^{k} + \Delta\eta^{k}\right)$$
$$\nabla f\left(x^{k+1}\right) - \nabla f\left(x^{k}\right) = \Delta g^{k}$$

Nous obtenons la relation suivante:

$$\Delta\eta^{(k)} = \frac{1}{\varpi}\,\frac{\Delta x^{(k)}\,y^{T}}{y^{T}\,\Delta g^{(k)}} - \frac{\eta^{(k)}\,\Delta g^{(k)}\,z^{T}}{z^{T}\,\Delta g^{(k)}} \tag{19}$$

où y et z sont $n \times 1$ vecteurs arbitraires.

6 PROCÉDURE DE RÉSOLUTION

6.1 Méthode de Broyden:

$\omega = 1$ et $y^{T} = z^{T} = \Delta x^{k} - \eta^{k}\cdot g^{k}$

La matrice de direction est:

$$\eta^{k+} = \eta^{k} + \left\{\frac{\left[\Delta x^{k} - \eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]\cdot\left[\Delta x^{k} - \eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]^{T}}{\left[\Delta x^{k} - \eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]^{T}\cdot\Delta g^{k}}\right\} \tag{20}$$

6.2 Méthode de Davidon-Fletcher-Powell:

$\omega = 1$, $y^{T} = \Delta x^{k}$ et $z^{T} = \eta^{k}\cdot g^{k}$

La matrice de direction est:

$$\eta^{k+1} = \eta^{k} + \left\{\frac{\Delta x^{k}\cdot\left(\Delta x^{k}\right)^{T}}{\left(\Delta x^{k}\right)^{T}\cdot\Delta g^{k}} - \frac{\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\cdot\left[\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]^{T}}{\left(\Delta g^{k}\right)^{T}\cdot\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}}\right\} \tag{21}$$

6.3 Méthode de Pearson:

$\omega = 1$, $y^{T} = z^{T} = \eta^{k}\cdot g^{k}$

La matrice de direction est:

$$\eta^{k+} = \eta^{k} + \left\{\frac{\left[\Delta x^{k} - \eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]\cdot\left[\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]^{T}}{\left(\Delta g^{k}\right)^{T}\cdot\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}}\right\} \tag{22}$$

6.4 Méthode de Zoutendijk:

$\omega \to \infty$, $y^{T} = z^{T} = \eta^{k}\cdot g^{k}$

La matrice de direction est:

$$\eta^{k+} = \eta^{k} - \left\{\frac{\left[\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]\cdot\left[\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}\right]^{T}}{\left(\Delta g^{k}\right)^{T}\cdot\eta^{k}\cdot\Delta g^{k}}\right\} \tag{23}$$

Algorithme

On pose $x^{k} = P_G^{k}$ et $H^{-1}\left(x^{k}\right) = \left[\nabla^{2} f(x^{(k)})\right]^{-1} = \eta\left(x^{k}\right)$

Etape 1 : Choisir $P_G^{(0)}$, et η^{0} matrice approximative du hessien définie positive.
(On prend η^{0} = I matrice unité , k = 0)

Etape 2 : Détermination de la direction de recherche $s^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)})\nabla f(x^{(k)})$

Etape 3 : Détermination de $P_G^{k+1} = P_G^{k} + \lambda^{k}\cdot s^{k}$
λ sera choisi telle que P_G^{k+1} soit une valeur acceptable pour la prochaine itération. On utilise pour cela une recherche linéaire.

Etape 4 : Détermination de $\Delta P_G^{k} = P_G^{k+1} - P_G^{k}$
et calculer $\Delta g^{k} = \nabla f\left(P_G^{k+1}\right) - \nabla f\left(P_G^{k}\right)$

Etape 5 : Calcul de la matrice de direction

$$\eta^{(k+1)} = \eta^{k} + \frac{1}{\varpi}\cdot\frac{\Delta x^{(k)}\,y^{T}}{y^{T}\,\Delta g^{(k)}} - \frac{\eta^{(k)}\,\Delta g^{(k)}\,z^{T}}{z^{T}\,\Delta g^{(k)}}$$

Etape 6 : Test d'arrêt si non aller à l'étape 2

7 ILLUSTRATION

L'application a été faite sur le réseau standard I.E.E.E 30 bus [FS68] qui possède six noeuds de production dont les fonctions de coûts sont :

$F_1 (P_{g1}) = 0.00375\, P^2_{g1} + 2.0\, P_{g1}$
$F_2 (P_{g2}) = 0.00175\, P^2_{g2} + 1.5\, P_{g2}$
$F_5 (P_{g5}) = 0.0625\, P^2_{g5} + 1.8\, P_{g5}$
$F_8 (P_{g8}) = 0.00834\, P^2_{g8} + 2.0\, P_{g8}$
$F_{11} (P_{g11}) = 0.02500\, P^2_{g11} + 1.5\, P_{g11}$
$F_{13} (P_{g13}) = 0.02500\, P^2_{g13} + 1.8\, P_{g13}$

sous les contraintes d'inégalités suivantes :

$50 \le P_{g1} \le 200$
$20 \le P_{g2} \le 80$
$15 \le P_{g5} \le 50$
$10 \le P_{g8} \le 40$
$10 \le P_{g11} \le 30$
$12 \le P_{g13} \le 40$
$\Sigma P_{ch} = 283.4$ MW $\quad S_b = 100$ MVA

Les caractéristiques des lignes et les valeurs planifiées des tensions et des puissances sont données dans les tableaux 1 et 2.

Tableau 1

ligne	R (p.u)	X (p.u)	B(total) (p.u)
1-2	0.0192	0.0575	0.0264
1-3	0.0452	0.1852	0.0204
2-4	0.0570	0.1737	0.0184
3-4	0.0132	0.0379	0.0042
2-5	0.0472	0.1983	0.0209
2-6	0.0581	0.1763	0.0187
4-6	0.0119	0.0414	0.0045
5-7	0.0460	0.1160	0.0102
6-7	0.0267	0.0820	0.0085
6-8	0.0120	0.0420	0.0045
6-9	0.0000	0.2080	0.0000
6-10	0.0000	0.5560	0.0000
9-11	0.0000	0.2080	0.0000
9-10	0.0000	0.1100	0.0000
4-12	0.0000	0.2560	0.0000
12-13	0.0000	0.1400	0.0000
12-14	0.1231	0.2559	0.0000
12-15	0.0662	0.1304	0.0000
12-16	0.0945	0.1987	0.0000
14-15	0.2210	0.1997	0.0000
16-17	0.0824	0.1923	0.0000
15-18	0.1070	0.2185	0.0000
18-19	0.639	0.1292	0.0000
19-20	0.0340	0.0680	0.0000
10-20	0.0936	0.2090	0.0000
10-17	0.0324	0.0845	0.0000
10-21	0.0348	0.0749	0.0000
10-22	0.0727	0.1499	0.0000
21-22	0.0116	0.0236	0.0000
15-23	0.1000	0.2020	0.0000
22-24	0.1150	0.1790	0.0000
23-24	0.1320	0.2700	0.0000
24-25	0.1885	0.3292	0.0000
25-26	0.2544	0.3800	0.0000
25-27	0.1093	0.2087	0.0000
27-28	0.0000	0.3960	0.0000
27-29	0.2198	0.4153	0.0000
27-30	0.3202	0.6027	0.0000
29-30	0.2399	0.4533	0.0000
8-28	0.0636	0.2000	0.0214
6-28	0.0169	0.0599	0.0065

Tableau 2

Bus	puissances planifiées	
	active	réactive
1	0.000	0.000
2	0.217	0.127
3	0.024	0.012
4	0.076	0.016
5	0.942	0.190
6	0.000	0.000
7	0.228	0.109
8	0.300	0.300
9	0.000	0.000
10	0.058	0.020
11	0.012	0.010
12	0.112	0.075
13	0.013	0.012
14	0.062	0.016
15	0.082	0.025
16	0.035	0.0018
17	0.090	0.058
18	0.032	0.009
19	0.095	0.034
20	0.022	0.007
21	0.175	0.112
22	0.000	0.000
23	0.032	0.016
24	0.087	0.067
25	0.000	0.000
26	0.035	0.023
27	0.000	0.000
28	0.000	0.000
29	0.024	0.009
30	0.106	0.019

les pertes actives totales sont calculées par la méthode de Gauss-Seidel [SA68, Rah85]:

$P_L = 17.51$ MW

Nous avons tenu compte des contraintes d'inégalités des puissances actives et nous avons fait varier les valeurs initiales $P_{gi}^{(0)}$ pour observer leurs influences sur les résultats optimaux (tableau 3).
Les résultats sont regroupés dans les tableaux 4, 5, 6, 7 pour les puissances actives générées optimales, et dans les tableaux 8, 9, 10, 11 pour le coût du combustible minimum et du temps de calcul (nombre d'itérations) pour les différentes méthodes.

Tableau 3

$P_{G1}^{(0)}$ MW	$P_{G2}^{(0)}$ MW	$P_{G5}^{(0)}$ MW	$P_{G8}^{(0)}$ MW	$P_{G11}^{(0)}$ MW	$P_{G13}^{(0)}$ MW
150	60	40	20	25	35
100	75	35	25	20	30
200	80	50	35	30	40
50	20	15	10	10	12
75	40	20	30	20	15

Tableau 4.Méthode de Broyden

P_{G1}^{opt} MW	P_{G2}^{opt} MW	P_{G5}^{opt} MW	$P_{G8}^{opt)}$ MW	P_{G11}^{opt} MW	P_{G13}^{opt} MW
171.95	58.72	20.90	35.22	8.87	5.23
174.25	59.90	20.16	32.21	8.67	5.68
169.37	59.03	22.02	34.39	9.80	6.28
175.62	58.02	20.13	33.05	9.11	4.95
171.85	58.51	21.92	32.63	9.85	6.12

Tableau 5.Méthode de DFP

P_{G1}^{opt} MW	P_{G2}^{opt} MW	P_{G5}^{opt} MW	$P_{G8}^{opt)}$ MW	P_{G11}^{opt} MW	P_{G13}^{opt} MW
138.15	54.85	35.18	20.76	22.02	29.91
105.51	75.51	37.50	27.68	22.87	32.45
177.28	57.62	27.67	12.77	7.77	17.74
82.45	50.83	45.33	40.18	40.07	42.21
99.31	56.58	36.73	43.22	34.49	31.61

Tableau 6.Méthode de Pearson

P_{G1}^{opt} MW	P_{G2}^{opt} MW	P_{G5}^{opt} MW	$P_{G8}^{opt)}$ MW	P_{G11}^{opt} MW	P_{G13}^{opt} MW
133.76	54.69	35.09	24.37	23.19	29.37
112.68	70.44	35.14	28.12	23.20	31.29
140.16	55.70	30.98	25.61	21.53	26.91
124.15	54.66	35.37	29.41	26.07	31.21
119.64	55.54	35.00	33.08	27.44	30.18

Tableau 7.Méthode de Zoutendijk

P_{G1}^{opt} MW	P_{G2}^{opt} MW	P_{G5}^{opt} MW	$P_{G8}^{opt)}$ MW	P_{G11}^{opt} MW	P_{G13}^{opt} MW
138.37	54.78	35.13	20.41	21.85	30.31
102.98	77.13	37.48	27.51	22.55	32.52
152.50	55.73	31.95	20.00	16.35	24.33
108.20	52.95	39.36	33.10	31.13	36.13
104.72	55.96	36.18	40.00	32.24	31.78

Tableau 8.Méthode de Broyden

$F^{(opt)}$ ($/h)	Nbre d'itérations	Temps de calcul (cs)
835.91	13	27.00
834.74	12	27.00
836.24	10	22.00
834.29	11	22.00
835.00	10	22.00

Tableau 9.Méthode de DFP

$F^{(opt)}$ ($/h)	Nbre d'itérations	Temps de calcul (cs)
870.49	4	06.00
911.40	2	05.00
835.68	3	05.00
974.00	2	05.00
920.84	2	05.00

Tableau 10.Méthode de Pearson

$F^{(opt)}$ ($/h)	Nbre d'itérations	Temps de calcul (cs)
873.29	3	06.00
894.91	5	11.00
860.49	5	11.00
883.72	5	11.00
886.88	5	11.00

Tableau 11.Méthode de Zoutendijk

$F^{(opt)}$ ($/h)	Nbre d'itérations	Temps de calcul (cs)
870.46	3	06.00
910.33	2	05.00
851.80	4	11.00
913.70	4	11.00
908.03	4	11.00

CONCLUSION

Nous pouvons affirmer tout de suite que le temps de calcul qui nous intéresse le plus (temps de convergence des méthodes) est très petit. Ceci est très intéressant compte tenu du fait que nous faisons une commande en temps réel.

Ce temps varie de 27 cs pour la méthode de Broyden à 5 cs pour les autres méthodes.

Concernant les valeurs des puissances générées, nous remarquons que l'écart entre les valeurs finales optimales est fonction des valeurs initiales choisies par le responsable du dispatching économique.

Pour la fonction de coût de combustible nous pouvons relever qu'elle est pratiquement contante pour la méthode de Broyden tandis que qu'elle varie également en fonction des valeurs initiales.

La méthode de Broyden est la seule insensible quant au choix des valeurs initiales, le coût minimum restant pratiquement constant et légèrement bas par rapport à celui des autres méthodes.

La méthode de Broyden est la seule insensible quant au choix des valeurs initiales, le coût minimum restant pratiquement constant et légèrement bas par rapport à celui des autres méthodes.

REFERENCES

[Abd98] **L. Abdelmalek** - *Applied Zoutendijk' method to economic dispatch*, Master thesis, april, 29th 1998, Electrical Institute, USTO, Oran, Algeria.

[DH88] **J. C. Dodu, P. Huard** - *Méthodes quasi-newtoniènnes sous contraintes non linéaires*, Bulletin de la direction des études de recherche, Electricité de France, série C, N°2, 1988.

[FS68] **L. L. Freris, A. M. Sasson** - *Investigation of the Load Flow Problem*, IEEE Transaction on Power Apparatus and system, Vol 115, N° 10, October 1968.

[Him72] **D. M. Himmelblau** - *Applied non linear programming*, Edition Mc Graw-Hill, 1972.

[Min83] **M. Minoux** - *Programmation mathématique: Théorie et algorithmes Tome 1*, Edition Dunod, 1983.

[Rah85] **M. Rahli** - *La commande optimale des puissances actives par la programmation linéaire*, Thèse de Magister soutenue le 3 juillet 1985, USTO.

[Rah96] **M. Rahli** - *Contribution à l'étude de la répartition optimale des puissances dans un réseau d'énergie électrique par la programmation linéaire et non linéaire*; Thèse de doctorat d'état soutenue le 07 janvier 1996, USTO-MB, Oran.

[SA68] **G. W. Stagg, A. H. El Abiadh** - *Computer Methods in Power System Analysis*, Edition Mc Graw Hill, 1968.