Ecuaţiile mişcării unidimensionale autosimilare

Col. ing. Gheorghe Nicolăiţă
Ministerul Apărării Naţionale

ABSTRACT. In the paper is present the self - similarity draft. On the of the self - similarity is introduce dimensioless variable V, R and P in stead velocity v, density ρ and preasure p. Is utilize dimensionless variable independent λ and montion rquation, continuity equation and entropy conservation equation is write in λ function.

1 Conceptul de autosimilaritate

Pentru evidenţierea problemelor care pot fi rezolvate cu ajutorul analizei dimensionale, trebuie analizate variabilele dependente şi parametrii caracteristici ce caracterizează mişcarea unidimensională.

Variabilele fizice de bază în metoda lui Euler sunt viteza v, densitatea ρ şi presiunea p iar parametrii caracteristici sunt coordonata liniară r, timpul t şi alte constante care intră în ecuaţiile din condiţiile la limită sau condiţiile iniţiale ale problemei. Cum dimensiunile mărimilor ρ şi p conţin simbolul masei, este necesar ca cel puţin o constantă a cărei dimensiuni să conţină simbolul masei trebuie să fie parametru caracteristic. Fără a pierde generalitatea analizei, considerând că această constantă este a, putem presupune dimensiunile constantei a de forma:

$$\left[a\right] = ML^{k}T^{s} \tag{1}$$

Pe baza acestei observaţii, se pot face următoarele schimbări de variabile pentru viteză, densitate şi presiune:

$$v = \frac{r}{t}V; \quad \rho = \frac{a}{r^{k+3}t^{s}}R; \quad p = \frac{a}{r^{k+1}t^{s+2}}P, \tag{2}$$

unde V, R şi P sunt noile variabile adimensionale, care pot depinde numai de combinaţii adimensionale ale lui r, t şi un alt parametru caracteristic al problemei. În cazul general aceste variabile V, R şi P sunt în funcţie de două variabile adimensionale. Dacă poate fi introdus un alt parametru caracteristic b cu dimensiuni independente de ale lui a, numărul de variabile adimensionale care pot fi formate din combinarea parametrilor caracteristici r, t, a şi b se reduce la o singură variabilă.

Cum dimensiunile constantei a conţin simbolul masei, putem considera că dimensiunile constantei b (fără a pierde generalitatea problemei) nu conţin simbolul masei, de exemplu luăm dimensiunile lui b de forma:

$$[b] = L^m T^n \tag{3}$$

În general pot fi mai multe constante caracteristice dar dimensiunile lor trebuie să depindă de a şi b. Pentru analiza mişcărilor autosimilare este esenţial ca să existe doar două constante caracteristice cu dimensiuni independente. Exponenţii fixaţi k, s, m şi n pot fi numere întregi, fracţionare sau transcendente. Aceşti exponenţi în problemele specifice sunt determinaţi de formularea problemelor, proprietăţile soluţiilor căutate şi de factorii care nu ţin de scopul analizei dimensionale.

Singura combinaţie independentă adimensională în acest caz este:

$$\frac{r^m t^n}{b} \tag{4}$$

şi poate fi înlocuită, pentru $m \neq 0$, de variabila:

$$\lambda = \frac{r}{b^{1/m} t^{\delta}} \tag{5}$$

unde $\delta = -n/m$.

Dacă $m = 0$ atunci V, R şi P depind numai de timp şi viteza devine proporţională cu r.

Soluţia dependentă de λ (variabila independentă adimensională) poate conţine şi un număr de constante arbitrare. Acest argument arată că atunci când parametrii caracteristici includ doar două constante cu dimensiuni independente pe lângă r şi t ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale satisfăcute de viteza v, densitatea ρ şi presiunea p, în mişcarea unidimensională nestaţionară, se poate înlocui cu ecuaţii diferenţiale ordinare pentru V, R şi P.

Soluţiile acestor ecuaţii diferenţiale ordinare pot fi obţinute uneori în formă analitică iar în alte cazuri aproximativ, folosind integrarea numerică cu menţiunea că astfel de mişcări se numesc autosimilare. Utilizând dimensiunile:

$$[a]_{SI} = M^1 L^k T^s, \quad [b]_{SI} = M^0 L^m T^n,$$

obţinem:

$$\left[\frac{a}{b}\right]_{SI} = M^1 L^{k-m} T^{s-n}, \quad \frac{a}{b} = c, \quad [c]_{SI} = M^1 L^{k-m} T^{s-n},$$

$$\rho = \frac{c}{r^{m-k}} R \quad \text{, cu } s = n, m = k+3$$

$$p = \frac{c}{r^{m-k+1}} P \text{, cu } s = n - 2, m = k - 1$$

2 Ecuaţii utilizate în studiul mişcărilor autosimilare

În ipoteza fluidelor ideale şi neglijării forţelor masice ecuaţiile de mişcare, de continuitate şi de conservare a entropiei sunt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{\rho v}{r} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

unde γ este indicele adiabatic , $\nu = 1$ pentru unde plane, $\nu = 2$ pentru unde cu simetrie de rotaţie şi $\nu = 3$ pentru unde cu simetrie sferică.

Sistemul de ecuaţii (6) nu conţine alte constante dimensionale prin urmare, problema mişcării autosimilare este determinată doar de numărul parametrilor cu dimensiuni independente introduşi de condiţiile suplimentare ale problemei. Dacă sunt doar doi parametri şi au dimensiuni independente mişcarea este autosimilară.

Se înlocuiesc în ecuaţiile (6) variabilele dependente v, ρ, p cu relaţiile (2), iar în locul variabilelor independente x şi t se consideră variabila independentă adimensională λ din relaţia (5). Înlocuind expresiile derivatelor variabilelor v şi p în funcţie de variabila adimensională λ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{r}{t^2}V + \frac{r}{t}\frac{dV}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ &\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{t}V + \frac{r}{t}\frac{dV}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial r} \\ &\frac{\partial p}{\partial r} = -(k+1)\frac{p}{r} + \frac{p}{P}\frac{dP}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial r} \end{aligned} \tag{7}$$

unde

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -\frac{\delta\,.\,\lambda}{t}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial r} = \frac{\lambda}{r} \tag{8}$$

Prima ecuație (ecuația de mişcare) din sistemul (6) devine:

$$\lambda\left(\left(\delta - V\right)V' - \frac{P'}{R}\right) = V^2 - V - \left(k+1\right)\frac{P}{R}\,. \tag{9}$$

Ecuațiile doi şi trei din sistemul (6) iau forma:

$$\lambda\left(\left(\delta - V\right)\frac{R'}{R} - V'\right) = -\,s - \left(k - \nu + 3\right)V, \tag{10}$$

$$\lambda\left(\delta - V\right)\left[\frac{P'}{P} - \gamma\frac{R'}{R}\right] = -\,s\left(1-\gamma\right) - 2 - \left[k\left(1-\gamma\right) + 1 - 3\gamma\right]V \tag{11}$$

în care $V' = \frac{dV}{d\lambda}$, $R' = \frac{dR}{d\lambda}$ şi $P' = \frac{dP}{d\lambda}$; δ, s , k sunt constante adimensionale, λ variabilă independentă dimensională.

3 Problema pistonului

Un gaz ocupă interiorul unui tub cilindric care este închis la un capăt de un piston. Gazul este în repaus în condițiile inițiale v_1=0, p_1, ρ_1 şi la un moment dat pistonul începe să se mişte cu viteză constantă U. Parametrii caracteristici în acestă problemă, ținând cont de r şi t, sunt densitatea inițială ρ_1, presiunea inițială p_1 şi viteza pistonului U.

4 Concluzii

Deoarece dimensiunile lui p_1, ρ_1 şi U sunt legate prin relația:

$$\left[U^2\right]_{SI} = \frac{\left[p_1\right]_{SI}}{\left[\rho_1\right]_{SI}} \tag{7}$$

rezultă că doar două constante caracteristice cu dimensiuni independente intervin în problemă, deci mişcarea este autosimilară.

Dacă viteza pistonului nu este constantă, de exemplu este proporțională cu o putere a timpului:

$$U = \xi\, t^n \tag{8}$$

ale cărei dimensiuni (pentru $n \neq 0$) sunt independente de cele ale lui p_1, ρ_1:

$$\left[\xi\right]_{SI} = LT^{-n-1} \tag{9}$$

în consecinţă mişcarea nu poate fi autosimilară. Mişcarea pistonului cu viteză variabilă poate fi considerată ca o mişcare autosimilară în cazul limită când $p_1 = 0$, caz în care apar doar două constante independente, respectiv ρ_1 şi ξ.

Bibliografie

[Abr78] **Abramovici, G.,N.-** *Pricladnaia gazovaia dinamica*, Gostehizdat, 1978.

[Bej96] **Bejan, A. -** *Termodinamică Tehnică Avansată*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996.

[CC81] **Carafoli, E., Constantinescu V,N. -** *Dinamica fluidelor incom-presibile*, Editura Academiei Române,1981.

[LL89] **Landau, L., Lifchitz, E,** - *Physique theorique*, Tome 6, Mecanique des fluides, Editions Mir Moscou, 1989.

[Sed67] **Sedov, L., I**. - *Metodî podobia i razmernosti v mehanike*, Izdat., Nauka, Moskva, 1967.

[Şte96] **Ştefan, Sterie -** *Ecuaţiile mecanicii fluidelor*, Editura Academia Tehnică Militară, Bucureşti, 1996.